Les nombres à l'école élémentaire

Connaissance des nombres entiers

L'apprentissage des nombres entiers concerne, d'une part, la construction du sens du nombre et, d'autre part, l'apprentissage de la numération, c'est-à-dire les règles de fonctionnement de l'écriture chiffrée des nombres et la manière de les dire avec des mots.

Pour un apprentissage de la numération

Il s'agit de réfléchir sur l'enseignement des mathématiques dans une perspective épistémologique, précisant que la connaissance de leur histoire peut nous éclairer sur la construction des concepts mathématiques chez l'élève.
Cette interrogation nécessite de penser son enseignement en référence au savoir (point de vue épistémologique), à l'élève (point de vue psychologique) et au processus de transmission (point de vue didactique).
Analyse au travers de trois exemples relatifs aux apprentissages numériques :

- L'apparition et le développement du nombre
- La désignation des nombres
- La révolution dans le calcul

1 - L'apparition et le développement du nombre

Du point de vue de l'enfant, puis dans les sociétés primitives et enfin au travers de l'histoire.
Les points de vue sur la genèse du nombre chez l'enfant sont ceux qui se sont le plus modifiés et ont été le plus remis en cause depuis trente ans.
Le jeune enfant acquiert très tôt des habiletés, qu'il s'agisse de discriminer des quantités, d'apparier des collections de même quantité, ou de manipuler des quantités.
La capacité à dire la chaîne des nombres va lui permettre de dénombrer, d'additionner ou de soustraire.
C'est par une connaissance réelle et une utilisation de plus en plus maîtrisée qu'il pourra mettre en jeu des compétences telles qu'isoler des mots nombres, démarrer à partir de… pour aller jusqu'à…, compter à rebours ou de x à y.

Dans cet apprentissage, le poids de la langue est important : en effet, le nombre de mots utilisés pour désigner les nombres varient d'une langue à l'autre et les conséquences sur les difficultés d'apprentissage sont notables.

Dans les sociétés primitives, le nombre nécessite la mise en œuvre de procédés divers pour son utilisation : le corps au-delà des doigts, des objets, le langage oral.

L'histoire du nombre est une histoire très longue. La préoccupation a toujours été de garder en mémoire des quantités.
Pour cela, les procédés ont été très divers : des entailles, des nœuds, les doigts ou le corps. Enfin, les mots puis l'écriture auront été une autre étape importante.

- Exemples :
- Le système de numération ''mésopotamien''
- Le système de numération ''égyptien''

2- Le système de numération décimal

Comment écrire les nombres ?

Notre système est l'aboutissement de tentatives nombreuses. Il peut être qualifié de perfectionné et de complexe.
En effet, on utilise un nombre limité de symboles permettant cependant d'aller loin, une base régulière, un principe de position et un symbole par nombre élémentaire.
Le caractère de complexité s'explique par le fait que les opérations sous jacentes ne sont pas explicitées.

De plus, ce système vient après bien d'autres systèmes qu'ils soient purement additifs (un chiffre par groupement, le nombre est la somme des chiffres), hybrides (un chiffre par groupement, un chiffre en multiplie un autre), positionnels (la place détermine la valeur du chiffre et le zéro est nécessaire).
Lorsqu'on fait du calcul avec les mains, on ne met pas en évidence la base 10. Il faudrait introduire le concept 0.

La question du zéro :

Zéro : quand le vide est devenu un chiffre

Il a été inventé par l'absence de quantité et non pas par comme étant le concept de rien en terme d'objet.

Il a été inventé pour des commodités de positionnement.

Le système romain ne comporte pas de 0.

Nous sommes en Mésopotamie 2 000 av J.C. Les Babyloniens inventent une nouvelle façon de représenter les nombres. Pour éviter toute confusion, ils introduisent donc le vide, un premier pas vers le zéro.

La première apparition du zéro a eu lieu à Babylone au IIIe siècle avant notre ère. Les babyloniens utilisaient une numération très complexe et limitée. Elle était de nature cunéiforme et en base 60. Les scribes babyloniens n'utilisaient que deux chiffres : un "clou" vertical représentant l'unité et un "chevron" associé au nombre 10. Pendant longtemps à Babylone on représentait les unités manquantes par un espace, mais cela était source de nombreuses erreurs. En effet, par exemple le nombre 61= 60x1 +1 et le chiffre 2 se notaient tous les deux à l'aide des deux mêmes symboles. L'un ayant un espace entre les deux symboles et l'autre non.

En 2 000 av J.C., les Babyloniens règnent en Mésopotamie, les territoires actuels de l'Irak et de la Syrie. Ils inventent une nouvelle façon de représenter les nombres. Une représentation basée sur deux signes : un clou qui vaut 1 et un chevron qui vaut 10. Pour compter, ils ont choisi la base 60. Dans cette base, les soixantaines se trouvent à la place de nos dizaines, et les 3600aines se trouvent à la place de nos centaines. La valeur d'un clou dépend de sa position.

La n
posi

Mais une confusion apparaît rapidement : comment distinguer le 1 du 3600 ? Les Babyloniens ont alors l'idée de dessiner des colonnes. Ainsi, lorsque le clou est positionné dans la colonne à droite, celle des unités, il vaut 1, lorsqu'il est dans la deuxième colonne, celle des soixantaines, il vaut 60... La valeur d'un signe dépend donc de la colonne où il se trouve : un clou en première position vaut moins qu'un clou en troisième position. C'est la numération de position.

Le signe du "rien"

Oui mais… certains scribes manquent de rigueur. On en voit même oublier des colonnes ! Car pour aller plus vite, ils se contentent d'espacer les chiffres entre eux. Or, selon le scribe, les espaces ont tous des longueurs différentes. Au final, on ne sait pas si 3 clous côte à côte appartiennent à trois colonnes différentes (3661) ou s'ils sont groupés dans une même colonne (3, 180, ou 10800). Bref, tant que les colonnes ne sont pas utilisées par tous de la même manière, il faut trouver une autre solution.

Vers 500 av. J.C., les Babyloniens décident de traiter l'absence et d'inventer un moyen de ponctuation qui serve à exprimer "il n'y a rien dans cette colonne". Ce moyen est un signe constitué de 2 clous inclinés. Un ancêtre du zéro ! Ou plutôt un faux ancêtre : pour le moment, il n'est pas considéré comme un chiffre. Et de plus, ce n'est pas lui qui donnera le zéro que l'on utilise aujourd'hui.

"Traiter l'absence et inventer un moyen de ponctuation qui serve à exprimer : il n'y a rien dans cette colonne"

Notre zéro vient des Indiens

C'est aux Indiens que l'on doit d'avoir inventé notre zéro. Sa présence est attestée dès le cinquième siècle de notre ère, en l'an 458 exactement. Très avancés dans les calculs, les Indiens possèdent neuf signes distincts pour compter de 1 à 9 et connaissent comme les Babyloniens la numération de position. Pour traiter l'absence, ils inventent sunya (qui signifie vide) qu'ils traitent très rapidement comme un chiffre : ils savent que lorsqu'on retire une quantité d'une autre quantité égale, il reste sunya, rien. Zéro apparaît donc après les neuf autres chiffres, c'est pourquoi les Indiens les dénombrent ainsi : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0.

Il faut attendre le huitième siècle pour voir le zéro apparaître dans le monde arabe. Il est introduit par un astronome indien à la cour du calif Al-Mansur, à Bagdad en même temps que tout le système de numération indien. Les Arabes traduisent alors sunya en as-sifr, qui devient ziffer puis zephiro. Ziffer donnera chiffre et zephiro donnera zéro. Zéro est donc le dernier venu de tous les chiffres. Une apparition qui constitue un pas décisif dans l'histoire de l'humanité : elle va ouvrir la voie au développement de l'algèbre et des techniques de calcul et donc à l'essor des sciences et des techniques.

Le zéro :
Absence dans une information chiffrée.
Compter 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9 – 10

10 1 et rien
1 et rien ne peut être plus grand que 9

1294 commence par un nombre 1 et c'est un grand nombre

Le rôle du zéro :

- absence de quantité et non concept de rien en termes d'objet.
- le nombre qui va faire le paquet zéro de droite
- là, où il va devenir nombre 2 + 0 = 2 2 x 0 = 0

3- La révolution dans le calcul

L'apparition des différents outils et les ruptures qu'ils ont provoquées :
La première concernant le passage du calcul sur abaque au calcul écrit.
La seconde, celui du calcul écrit au calcul instrumenté.

La numération orale, c'est-à-dire la manière usuelle de dire le nom du nombre. Ce système est complexe et ne coïncide pas, en français, avec la numération écrite.
Contrairement à la numération écrite, qui relève d'un système positionnel de base dix dont la logique est simple, la numération orale n'est pas positionnelle ; elle fait appel à des règles de formation aussi bien additives (« dix-sept » correspond à 10 + 7, « quarante-trois » à 40 + 3) que multiplicatives (« quatre-vingts » c'est 4 x 20, « six cents » 6 x 100) qui peuvent se combiner entre elles (« quatre-vingt-dix-sept » c'est 4 x 20 + 10 + 7).
Les groupements sur lesquels s'appuie la numération orale sont parfois de dix ou de puissance de dix comme cent, mille…, mais également de vingt, avec l'anomalie des premiers nombres qui ont chacun un nom spécifique jusqu'à seize inclus.
Il est plus facile d'aller à 100 qu'à 19. (''vingt dix'' n'existe pas après 29)
Or ''soixante dix'' se dit après 69

Cet état de fait résulte d'influences multiples sur la langue parlée au cours des siècles.
On dirait alors deux dix trois pour 23, comme on dit deux cent trois pour 203 ou sept mille deux cent cinq pour 7205 !
Vingt : deux dix ; trente : trois dix

Nombre de **mots** dans la numération parlée **27**
9 – 10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 20 – 30 – 40 – 50 – 60
100 – 1000 – 1 000 000- 1 000 000 000 (et)

Progression :

- la suite de onze à vingt
- la suite de vingt à soixante
- de soixante à quatre-vingt-dix-neuf

La numération écrite (ou système de numération d'écriture du nombre + concept de la quantité) c'est-à-dire l'écriture à l'aide des chiffres dits arabes, en réalité de l'Inde. C'est une numération de position de base dix, dont la maîtrise nécessite de comprendre la distinction entre chiffre et nombre, le principe de groupement par dix et le fait qu'un chiffre n'a pas une valeur immuable, mais qu'elle change selon sa place dans l'écriture du nombre.

Un nombre peut s'écrire avec un ou plusieurs chiffres.
Les écritures à un chiffre ne désignent pas les mêmes valeurs dans tous les systèmes de numération écrite : ainsi dix, comme cent, sont des nombres à un chiffre en numération romaine.

Nombre de signes **10 (symboles ou chiffres)**

L'élève va ainsi se construire une évolution des nombres > à 10
d'après Karen FUSON :

- 1er stade : la conception unitaire (l'élève se montre capable de traduire un nombre comme quantité indissociable)
- 2ème stade de la conception entre groupe et unité (l'élève voit dans l'énoncé de 43 : un groupe de 40 et un groupe de 3.
- 3ème stade : Le groupe de 40 peut se décomposer en 4 groupes de 10.
- 4ème stade : donner à chaque chiffre qui compose le nombre la valeur de leur décomposition.

  Compréhension de la lecture et l'utilisation du tableau des classes
  43
  4 dizaines et 3 unités

  Pour arriver au dernier stade, il doit maîtriser les autres stades. Pour ce faire, il faut varier les lectures de l'énonciation.
  Ex : dictée de nombres en variant le modèle d'énonciation. Quand l'élève aura maîtrisé tous ces stades, il aura compris la problématique de la numération.

Un système de numération positionnelle repose sur trois principes fondamentaux :

- la valeur d'un signe dépend de **sa position** dans l'écriture du nombre
- cette valeur représente **des groupements d'unités** (ex : dizaines, centaines, milliers… dans notre système décimal)
- la méthode de groupements est **régulière,** c'est-à-dire qu'un groupement contient toujours le même nombre d'éléments pouvant être échangés contre l'unité supérieure ; **la valeur de cet échange s'appelle la base.**

Les nombres interviennent dans de nombreux domaines.

Nombres et calcul

Le sens du nombre

- Quantifier une collection : aspect cardinal
- Se situer dans la file : aspect ordinal
- Comparer, ranger
- Représenter les nombres sur une droite numérique

La numération décimale

- Connaître (savoir écrire et nommer), les nombres entiers naturels (CP jusqu'à 100, CE1 jusqu'à 1000, cycle 3 jusqu'au milliard)

- Principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres
- Associer la désignation orale et la désignation écrite
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres
- Repérer et placer ces nombres sur une droite graduée, utilisation des signes > et < (cycle 3)
- Les fractions et les nombres décimaux (cycle 3)
- Calcul sur des nombres entiers : le calcul en ligne, le calcul posé
- Le calcul mental permet une connaissance plus approfondie des nombres calcul automatisé, calcul instrumenté
- Connaître et utiliser les techniques opératoires

Grandeurs et mesures
Organisation et gestion des données
La résolution de problèmes

Calcul mental :
Compétences numériques
23 2 fois 10 + 3
Énoncer le nombre 23 quand on aperçoit 2 paquets de 10 objets et 3 objets isolés relève d'un résultat mémorisé.
Organiser une collection en paquets de 10 objets pour la dénombrer s'apparente à une procédure automatisée.
Procéder à des groupements échanges est une stratégie de calcul efficace pour communiquer de manière simple sur la quantité en question.

Proposé au cycle 3, un problème comme « Le maître a reçu 2 boîtes de 100 craies et 3 étuis de 10 craies. Combien a-t-il reçu de craies en tout ? » permet de tester la connaissance de la numération en base 10. On attend des élèves une procédure automatisée qui repose sur les paquets de 100 et de 10.

1) (100 + 100 + 10 + 10 + 10 = 230)
2) La procédure à encourager repose sur la numération : 2 paquets de 100 et 3 paquets de 10 font un total de 230 craies.

PROGRESSION:

- Technique de dénombrement : La notion de groupement
- Les groupements par 10
- La dizaine
- La base 10
- Le codage en dizaines / unités
- Les mots *dizaine* et *unité*

L'ADDITION et l'apprentissage des tables d'addition

La maîtrise de l'addition se construit au cycle 2. Après une pratique intuitive à l'école maternelle, on installe les signes opératoires au CP, puis on exige la connaissance des tables en fin de cycle 2 et enfin on aborde, au cours du cycle 3, l'addition de quelques fractions simples et des nombres décimaux .
Introduction du symbolisme, les mots *plus et égal* et la propriété de commutativité de l'addition (3+2=2+3).

Les règles de la numération
La difficulté tient au fait que *le nom des nombres de onze à seize ne reflète pas leur écriture.*
dix-sept avec un 1 à gauche, correspond à un paquet de 10 unités regroupées, et un 7 à droite, correspondant à 7 unités
Automatiser la correspondance entre les trois formes de présentation des nombres (nom de nombre, écriture chiffrée, collection)

La numération

10 + 1	10 + 2	10 + 3	…	10 + 8	10 + 9	10 + 10
1 + 10	2 + 10	3 + 10	…	8 + 10	9 + 10	10 + 10

Les doubles : automatisation des résultats
Les compléments à 10 : la stabilisation de cet apprentissage garantit une bonne maîtrise de la numération décimale.
Les sommes inférieures à 10
Le passage par le paquet de 10 : privilégier l'organisation en paquets de 10 dans les activités de dénombrement ou de partage construites à partir de collections d'objets.
(principe de base de la numération décimale), ce qui permet de donner du sens aux apprentissages.

Il convient de réfléchir à la difficulté que représente l'organisation spatiale des objets dans la construction des paquets de 10.
Parmi les plus faciles : cartes à points, les doigts, les boîtes de 10 objets ou le triangle équilatéral de base 4 objets.

On peut proposer d'utiliser une propriété du nombre 10, nombre triangulaire qu'on peut représenter sous la forme d'un triangle de côté 4 (référence perceptive du 10)
Parmi les plus complexes : schéma d'un sac fermé par un nœud (contrôle visuel insuffisant)

La construction de la dizaine

Le paquet de 10 peut être représenté par :

- une barrette de 10 cubes (10 unités qui deviennent une dizaine en restant visibles)
- cubes emboîtables (une barre de 10 fabriquée par l'élève lui-même)
- une boîte que l'on ferme lorsqu'elle est remplie, 10 unités qui deviennent une dizaine
  (les boîtes de Picbille)

Matériel de numération
Cubes *unité*
Barrettes *dizaine*
Plaques *centaine*
Gros cubes *millier*

Objectifs
Identifier les groupements *unité, dizaine, centaine, millier.*
Entraîner au codage des quantités.
Remédier aux difficultés des élèves qui n'ont pas stabilisé la numération de position.
Distinguer chiffre de… et nombre de…

Progression proposée par le manuel Picbille :

- groupement par 5 avec utilisation de demi boîtes de Picbille (+cache)
- dénombrement et décomposition des nombres jusqu'à 10
- du nombre 5 au double 5+5 jusqu'au nombre 10 (avec l'utilisation de billets de 10 euros et de pièces)

- un petit sachet contenant 10 objets visibles
- pièces et billets de 5 contre un billet de 10

Le passage de la barrette ou de la boîte au trait, du petit cube au point et donc de la discontinuité des objets à la continuité du trait : l'élève perd alors la quantité.

Le passage par 10 :
4 + 7 3 + 8 2 + 9 3 + 9 4 + 8 5 + 7 5 + 8 4 + 9 5 + 9 6 + 8 6 + 9
9 + 6 8 + 6 9 + 5 9 + 4 8 + 5 7 + 5 8 + 4 9 + 3 9 + 2 8 + 3 7 + 4

Le tableau de Pythagore de l'addition : dernier temps de l'apprentissage (synthèse des connaissances et des stratégies de calcul proposées)

Produire des décompositions additives inférieures à 10

Tableau de nombres ou le damier 0-99 :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49

Le damier 0-99 est un bon outil pour le travail autour de « ajouter 10 », « ajouter 9 », « ajouter 11 ».

Exemples d'activités et matériels
Connaître les nombres entiers naturels inférieurs à 100 (CP)
Connaître les nombres entiers naturels inférieurs à 1000 (CE1)
Connaître les nombres entiers jusqu'au million (CM1)
Connaître les nombres entiers jusqu'au milliard (CM1 / CM2 / 6 ème)

Dictée de nombres (CP, CE1)
Le nombre pensé (CP)
Décodage de quantités (CP, CE1)
Écrire une suite dans l'ordre croissant ou décroissant (CP)
Comparer, ranger, encadrer des nombres (CP)
Écrire ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100 (CE1 / CE2)
Repérer et placer des nombres sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer (CE1, CE2, CM1)

Associer les différentes écritures d'un même nombre : décomposer / recomposer

Jeu de bataille
Jeu de loto
Jeu du banquier
Jeu de la marchande
Trouvez la page !
Le damier puzzle
Utilisation de l'abaque
Utilisation du boulier traditionnel à dix tiges de dix perles
Utilisation du boulier chinois
Monnaie factice
Cartons de Montessori
Compteurs à roues ou à bandes
Cartes à points

L'utilisation des cartons de Montessori facilite la décomposition en dizaines et unités.
Ce matériel permet de faire le lien entre l'écriture en chiffres du nombre et la lecture de ce nombre qui est basée sur une numération de type additive et multiplicative. De plus ce matériel permet de mémoriser la décomposition canonique des nombres qui correspond aux mots nombres utilisés.
Exemple: 333 = 300 + 30 + 3 et se lit trois cent trente-trois.

L'abaque grâce à la décomposition permise par les tiges unités, dizaine, centaine, l'élève peut se représenter les paquets de chiffres existant dans le nombre.

Le tableau de numération permet de travailler les notions de position de manière plus abstraite que les cartes ou le compteur.
Il faut être vigilant lorsque l'on introduit le tableau de numération. Mal introduite, une telle représentation peut masquer les autres lectures possibles du nombre: 62 dizaines et 4 unités, 6 centaines et 24 unités.
L'élève utilise le tableau pour écrire les nombres et les décomposer en centaines, dizaines, unités.

c	d	u
6	**2**	**4**

Équipe ERMEL
Rémi BRISSIAUD / Roland CHARNAY
Stella BARUCK

Apprentissage de la comptine numérique ‘’ à l’asiatique ‘’ en sus de la comptine numérique traditionnelle.

‘’J’apprends les maths avec Tchou‘’ / ‘’J’apprends les maths avec Picbille‘’ de Rémi BRISSIAUD

<u>Les difficultés relatives au système de numération décimale de position</u>

- L’élève a des difficultés à grouper par dix pour trouver combien de dizaines et d’unités comporte une collection
- L’élève a des difficultés pour comprendre les différences de valeur des chiffres dans un nombre
- L’élève a des difficultés à donner la valeur d’un chiffre selon sa position dans l’écriture d’un nombre

<u>Les principales difficultés en numération</u>

- Règles de groupements ou d’échanges
- Dénombrer et réaliser des quantités en utilisant le comptage un à un ou des groupements et des échanges par dizaines et centaines ;
- Grouper par dix pour trouver combien de dizaines comporte une collection ;
- Rôle du zéro
- Représenter une quantité en écriture chiffrée ;
- Savoir combien d’unités représentent *n* dizaines, ou combien de dizaines représentent *p* centaines ;
- Faire la différence entre « chiffre des » et « nombre de » chiffre des dizaines et nombre de dizaines… ;
- Citer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné ;
- Produire des suites orales et écrites de nombres de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100 ;
- Encadrer un nombre entre deux dizaines (ou centaines) consécutives ;
- Encadrer un nombre entre deux autres nombres.